Конспект лекции по теме «НЕОПРЕДЕЛЁННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ».

В школьном курсе математики изучаются прямые и обратные операции: сложение и вычитание, умножение и деление, возведение в степень и извлечение корня. Обратные операции обычно бывают более сложными, чем прямые.

Понятие первообразной и неопределённого интеграла.

В дифференциальном исчислении по данной функции необходимо было найти её производную. А интегральное исчисление является обратной операцией дифференциального. В основе интегрального исчисления лежит отыскание начальной функции по выражению её дифференциала.

Определение 1. Пусть функция $f(x)$ есть производная от функции $F(x)$, т.е. $f(x)dx$ есть дифференциал $F(x)$: $f(x)dx = dF(x)$.

Тогда $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$.

Пример 1. $y = 3x^2$ есть производная от функции $y = x^3$, т.е. $3x^2dx$ есть дифференциал функции x^3 : $3x^2dx = d(x^3)$. По определению 1 x^3 является **первообразной** для $3x^2$.

Определение 2. Любая непрерывная функция $f(x)$ имеет бесчисленное множество первообразных.

Пример 2. $3x^2dx = d(x^3 + 7)$. По определению 1 функция $y = x^3 + 7$ также является первообразной для $3x^2$.

Если $F(x)$ является одной из первообразных, то всякая другая представляется выражением $F(x) + C$, где C – постоянная величина, т.е. константа. Последняя может задаваться произвольно.

Предостережение:

Всякую первообразную от $3x^2$ можно представить в выражениях $x^3 + C$ и $x^3 + 7 + C$, но эти выражения нельзя приравнивать из-за того, что C в них неодинаковы. Для наглядности можно записывать в виде $x^3 + C = x^3 + 7 + C_1$. Здесь C и C_1 связаны соотношением $C = C_1 + 7$.

Справедливо следующее утверждение: если функция $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$ на интервале $[a, b]$, то всякая другая первообразная функции $f(x)$ отличается от $F(x)$ на постоянное слагаемое, т.е. представляется в виде $F(x) + C$, где C – постоянная величина.

Совокупность всех первообразных называется неопределённым интегралом функции $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx = F(x) + C$.

$f(x)dx$ – называется подинтегральным выражением;
$f(x)$ – подинтегральной функцией;
x – переменной интегрирования.

Нахождение неопределённого интеграла называется интегрированием функции $f(x)$.

Так как $(F(x) + C)' = f(x)$, то $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$. Из этих формул видно, что если функцию $f(x)$ проинтегрировать, а затем продифференцировать, то получим снова функцию $f(x)$.

Получается, что дифференцирование и интегрирование являются взаимно обратными операциями.

Перечислим ***основные свойства неопределённого интеграла***.

1. Знак дифференциала перед знаком интеграла уничтожает последний:
   $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

2. Производная неопределённого интеграла равна подинтегральной функции $\frac{d}{dx}\int f(x)dx = f(x)$.
3. Знак интеграла перед знаком дифференциала уничтожает последний, но при этом вводится произвольное постоянное слагаемое $\int d\Phi(x) = \Phi(x) + C$.

   Пример 3. $\int d\sin(x) = \sin(x) + C$.
4. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла $\int a\, f(x)dx = a\int f(x)dx$.

   Пример 4. $\int 6x\, dx = 6\int x\, dx = 6(\frac{1}{2}x^2 + C) = 3x^2 + 6C = 3x^2 + C_1$, где $C_1 = 6C$.
5. Интеграл алгебраической суммы равен сумме интегралов от каждого слагаемого в отдельности. Для трёх слагаемых:

   $$\int[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$$

   Пример 5.

   $$\int(5x^2 - 2x + 4)dx = \int 5x^2dx - \int 2xdx + \int 4dx = (\frac{5}{3}x^3 + C_1) - (x^2 + C_2) + (4x + C_3) =$$

   $$= \frac{5}{3}x^3 - x^2 + 4x + C, \text{ где } C = C_1 - C_2 + C_3.$$

Основные методы интегрирования.

Вычисление неопределённого интеграла является задачей значительно более трудной, чем отыскание производной. Например, нет никаких правил для нахождения неопределённых интегралов от произведения или частного двух функций. Кроме того, интегралы от некоторых элементарных функций, например, e^{-x^2}, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$, не являются элементарными функциями. Тогда говорят, что интеграл от них не берётся в элементарных функциях.

Основным методом вычисления интегралов является сведение неопределённого интеграла к табличному.

Таблица простейших интегралов:

I. $\int dx = x + C$;

II. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $\quad$ $(n \neq -1)$;

III. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $\quad$ $(x \neq 0)$;

IV. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctg\ x + C, \\ -arcctg\ x + C. \end{cases}$

V. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\ \frac{x}{a} + C$;

VI. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + C$;

VII. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

VIII. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C$;

IX. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{cases}$;

X. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$;

XI. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$;

XII. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$ $\qquad (a > 0,\ a \neq 1)$; $\qquad \int e^x \, dx = e^x + C$;

XIII. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$;

XIV. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$;

XV. $\int tg\, x \, dx = -\ln |\cos x| + C$;

XVI. $\int ctg\, x \, dx = \ln |\sin x| + C$;

XVII. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| tg \frac{x}{2} \right| + C$;

XVIII. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| tg \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$;

XIX. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$;

XX. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$.

Кроме ***табличного*** метода вычисления неопределённых и определённых интегралов существуют ещё и метод ***замены переменной*** и метод ***интегрирования по частям***.

Замена переменной.

Если:

1. функция ***f(x)*** непрерывна на сегменте [***a, b***];
2. функция ***φ(x)*** непрерывна вместе со своей производной ***φ'(x)*** на сегменте [***α***, ***β***], где ***a = φ(α)***, ***b = φ(β)***;
3. сложная функция ***f(φ(t))*** определена и непрерывна на сегменте [***α***, ***β***], то

$$\int_b^a f(x) \, dx = \int_b^a f(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt .$$

Интегрирование по частям.

Если функции ***f(x)*** и ***q(x)*** принадлежат какой-то области $C^{(1)}$ на сегменте [***a, b***], то

$$\int_b^a f(x) \, q'(x) \, dx = f(x) \, q(x) \Big|_b^a - \int_b^a q(x) \, f'(x) \, dx .$$

Эту же формулу можно переписать в виде: $\int u(x) \, dv(x) = u(x) \, v(x) - \int v(x) \, du(x)$

Для наглядности рассмотрим несколько **примеров** с применением вышеперечисленных методов интегрирования:

6. $\int \left(3\sqrt{x} - 4x \right) dx = 3 \int x^{\frac{1}{2}} \, dx - 4 \int x \, dx = 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 4 \frac{x^2}{2} + C = 2x\sqrt{x} - 2x^2 + C$.

7. $\int(2\sin t-3\cos t)\,dt=2\int\sin t\,dt-3\int\cos t\,dt=-2\cos t-3\sin t+C$.

8. $\int\left(x^2+1\right)^4\cdot x^3\,dx=$ (для того, чтобы решить данный пример необходимо раскрыть скобки в подинтегральном выражении. В результате получим) =
$\int\left(x^{11}+4x^9+6x^7+4x^5+x^3\right)dx=$

$$=\frac{x^{12}}{12}+4\frac{x^{10}}{10}+6\frac{x^8}{8}+4\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}+C=\frac{1}{12}x^{12}+\frac{2}{5}x^{10}+\frac{3}{4}x^8+\frac{2}{3}x^6+\frac{1}{4}x^4+C.$$

9. $\int\sqrt{2x-1}\,dx$. Здесь можно применить ***метод замены переменной***. **$2x-1=z$; $2dx=dz$;**

$\sqrt{2x-1}\,dx=\sqrt{z}\,\frac{dz}{2}$. Получим:

$$\int\sqrt{z}\,\frac{dz}{2}=\frac{1}{2}\int z^{\frac{1}{2}}\,dz=\frac{1}{2}\frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}z^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{2}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+C.$$

Проверим дифференцированием:

$$d\left[\frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}}+C\right]=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}}\,d(2x-1)=\sqrt{2x-1}\,dx.$$

10. $\int\frac{dx}{(8-3x)^2}$. Вводим ***$z=(8-3x)$,*** отсюда $dx=-\frac{dz}{3}$.

После подстановок получаем:

$$\int\frac{dx}{(8-3x)^2}=\int-\frac{dz}{3z^2}=\frac{1}{3z}+C=\frac{1}{3(8-3x)}+C.$$

11. $\int\frac{2x\,dx}{1+x^2}$. Разобьём подинтегральное выражение на сомножители: $\frac{1}{1+x^2}$ и ***$2x\,dx$***.

$2x\,dx$ – дифференциал функции $1+x^2$. $z=1+x^2$. Отсюда $\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{z}$. Получаем:

$$\int\frac{2x\,dx}{1+x^2}=\int\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=\ln\left(1+x^2\right)+C.$$

12. $\int\sin x\cdot\cos^3x\,dx$. Разбиваем также на сомножители: $\sin x\,dx=-d\cos x$ и $\cos^3 x$.

$z=\cos x$, $z^3=\cos^3x$. $\int\sin x\cdot\cos^3x\,dx=-\int\cos^3x\,d\cos x=-\int z^3\,dz=-\frac{\cos^4x}{4}+C$.

13. Найти $\int x\sin 2x\,dx$. Пусть $u=x$, $dv=\sin 2x\,dx$. Необходимо найти $v(x)$ и du. $du=dx$, $v=\int dv=\int\sin 2x\,dx=-\frac{\cos 2x}{2}$. Применим метод интегрирования по частям и получим:

$$\int x\sin 2x\,dx=-\frac{x\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx=-\frac{x\cos 2x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

14. Найти $\int\frac{\ln x\,dx}{x^2}$. Поступим также, как в предыдущем примере. $u=\ln x$, $dv=\frac{dx}{x^2}$.

Тогда $du=\frac{dx}{x}$, $v=\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}$. В результате: $\int\frac{\ln x\,dx}{x^2}=-\frac{\ln x}{x}+\int\frac{dx}{x^2}=-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$.