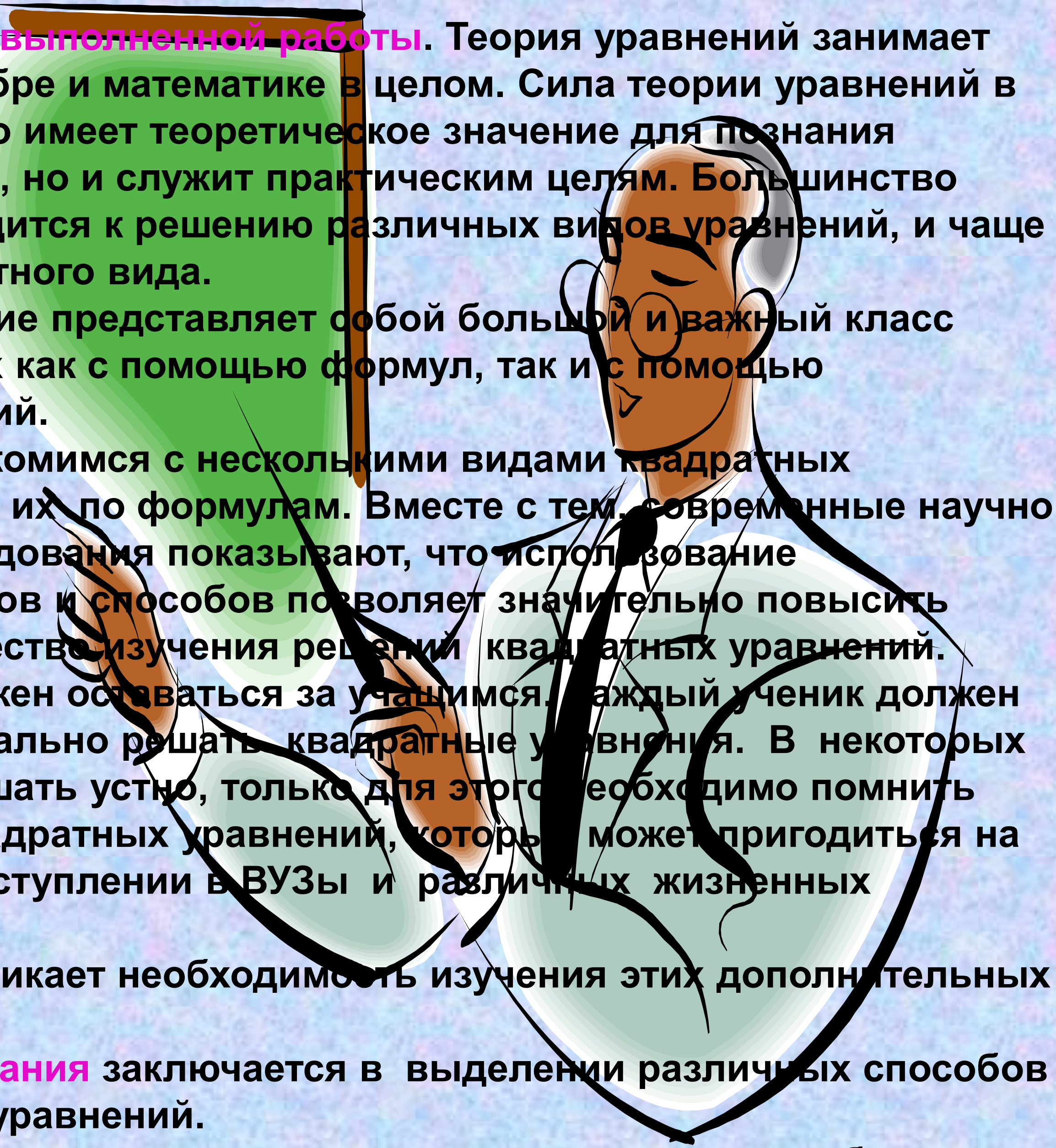
Способы решения квадратных уравнений.

Автор работы: учитель математики
Скокова Т.М.



Актуальность **темы выполненной работы. Теория уравнений занимает ведущее место в алгебре и математике в целом. Сила теории уравнений в том, что она не только имеет теоретическое значение для познания естественных законов, но и служит практическим целям. Большинство жизненных задач сводится к решению различных видов уравнений, и чаще это уравнения квадратного вида.**

Квадратное уравнение представляет собой большой и важный класс уравнений, решающих как с помощью формул, так и с помощью элементарных функций.

В учебниках мы знакомимся с несколькими видами квадратных уравнений, и решаем их по формулам. Вместе с тем, современные научно – методические исследования показывают, что использование разнообразных методов и способов позволяет значительно повысить эффективность и качество изучения решений квадратных уравнений.

Выбор способа должен оставаться за учащимся. Каждый ученик должен уметь верно и рационально решать квадратные уравнения. В некоторых случаях можно их решать устно, только для этого необходимо помнить алгоритм решения квадратных уравнений, который может пригодиться на экзамене ЕГЭ , при поступлении в ВУЗы и различных жизненных ситуациях.

Таким образом, возникает необходимость изучения этих дополнительных способов решения.

Проблема **исследования заключается в выделении различных способов решения квадратных уравнений.**

Цель **работы состоит в изучении теоретических основ способов решения квадратных уравнений и их практическое применение.**

История развития квадратных уравнений.

- Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне:

Квадратные уравнения умели решать около 2000 лет до н. э. вавилоняне.

Применяя современную алгебраическую запись, можно сказать, что в их клинописных текстах встречаются, кроме неполных, и такие, например, полные квадратные уравнения:

$X^2+X=3/4$ $X^2-X=14{,}5$

Правило решения этих уравнений, изложенное в вавилонских текстах, совпадает по существу с современным, однако неизвестно, каким образом дошли вавилоняне до этого правила. Почти все найденные до сих пор клинописные тексты приводят только задачи с решениями, изложенными в виде рецептов, без указаний относительно того, каким образом они были найдены.

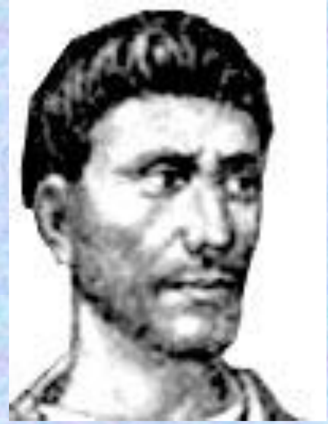
Как составлял и решал квадратные уравнения Диофант.

В «Арифметике» Диофанта нет систематического изложения алгебры, однако в ней содержится систематизированный ряд задач, сопровождаемых объяснениями и решаемых при помощи составления уравнений разных степеней.

Задача . «Найти два числа, зная, что их сумма равна 20, а произведение - 96»

Диофант рассуждает следующим образом: из условия задачи вытекает, что искомые числа не равны, так как если бы они были равны, то их произведение равнялось бы не 96, а 100. Таким образом, одно из них будет больше половины .

Получаем уравнение:



$$(10+x)(10-x) = 96$$

или же:

$$100 - x^2 = 96$$

$$x^2 - 4 = 0 \qquad (1)$$

Решение **x = -2** ***для Диофанта не существует, так как греческая математика знала только положительные числа.***

Квадратные уравнения в Индии.

Задачи на квадратные уравнения встречаются уже в астрономическом тракте «Ариабхаттиам», составленном в 499 г. индийским математиком и астрономом Ариабхаттой. Другой индийский ученный, Брахмагупта (VII в.), изложил общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единой канонической форме:

$$ax^2 + bx = c, \qquad a>0. \qquad (1)$$

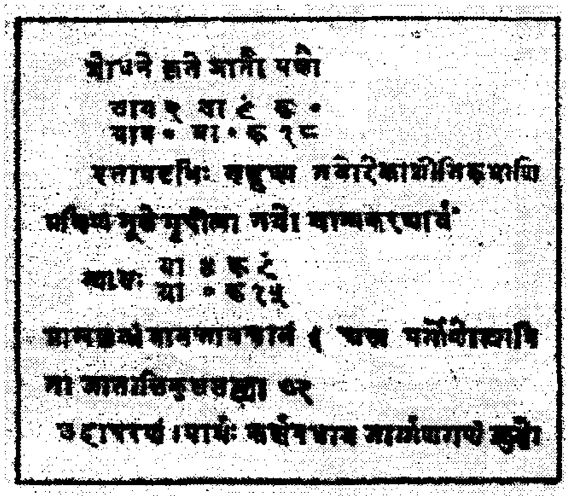


Рис. 3. Часть страницы из алгебры Бхаскары «Видиса Ганита» (вычисление корней)

Задачи часто облекались в стихотворную форму.

Задача .

«Обезьянок резвых стая
Всласть поевши, развлекалась.
Их в квадрате часть восьмая
На поляне забавлялась.
А двенадцать по лианам…
Стали прыгать, повисая…
Сколько ж было обезьянок,
Ты скажи мне, в этой стае?»

Квадратные уравнения у аль – Хорезми.

В алгебраическом трактате ал - Хорезми дается классификация линейных и квадратных уравнений. Автор насчитывает 6 видов уравнений, выражая их следующим образом:

1) «Квадраты равны корнями», т.е. ax2 + c = bx.

2) «Квадраты равны числу», т.е. ax2 = c.

3) «Корни равны числу», т.е. ax = c.

4) «Квадраты и числа равны корням», т.е. ax2 + c = bx.

5) «Квадраты и корни равны числу», т.е. ax2 + bx = c.

6) «Корни и числа равны квадратам», т.е. bx + c = ax2.

При решении полных квадратных уравнений ал - Хорезми на частных числовых примерах излагает правила решения, а затем и геометрические доказательства.

Задача. **«Квадрат и число 21 равны 10 корням. Найти корень»** ***(подразумевается корень уравнения*** $x^2 + 21 = 10x$***).***

Решение автора гласит примерно так: раздели пополам число корней, получишь 5, умножишь 5 само на себя, от произведения отними 21, останется 4. Извлеки корень из 4, получишь 2. Отними 2 от5, получишь 3, это и будет искомый корень. Или же прибавь 2 к 5, что даст 7, это тоже есть корень.

Трактат ал - Хорезми является первой, дошедшей до нас книгой, в которой систематически изложена классификация квадратных уравнений и даны формулы их решения.

Квадратные уравнения в Европе XIII - XVII вв.

Формулы решения квадратных уравнений по образцу ал - Хорезми в Европе были впервые изложены в « Книге абака», написанной в 1202 г. итальянским математиком Леонардо Фибоначчи.

Этот объемистый труд, в котором отражено влияние математики, как стран ислама, так и Древней Греции, отличается и полнотой, и ясностью изложения. Автор разработал самостоятельно некоторые новые алгебраические примеры решения задач и первый в Европе подошел к введению отрицательных чисел. Его книга способствовала распространению алгебраических знаний не только в Италии, но и в Германии, Франции и других странах Европы. Многие задачи из « Книги абака» переходили почти во все европейские учебники XVI - XVII вв. и частично XVIII.

Общее правило решения квадратных уравнений, приведенных к единому каноническому виду:

$$x^2 + bx = c,$$

при всевозможных комбинациях знаков коэффициентов *b*, *c* было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. М. Штифелем.

О теореме Виета.

Теорема, выражающая связь между коэффициентами квадратного уравнения и его корнями, носящая имя Виета, была им сформулирована впервые в 1591 г. следующим образом:

«Если B + D, умноженное на A - A^2, равно BD, то A равно B и равно D».

На языке современной алгебры вышеприведенная формулировка Виета означает: если имеет место

$$(a + b)x - x^2 = ab,$$

т.е.

$$x^2 - (a + b)x + ab = 0,$$

то

$$x_1 = a, \ x_2 = b.$$

Квадратные уравнения - это фундамент, на котором строится величественное здание алгебры.
Мы знакомимся с квадратными уравнениями с 8 класса.

В школьном курсе математики изучаются формулы корней квадратных уравнений, с помощью которых можно решать любые квадратные уравнения. Однако имеются и другие способы решения квадратных уравнений, которые позволяют очень быстро и рационально решать многие уравнения.
Некоторые из них мы сейчас рассмотрим.

Способы решения квадратных уравнений.

1. СПОСОБ: Разложение левой части уравнения на множители.

Решим уравнение $x^2 + 10x - 24 = 0$. **Разложим левую часть на множители:**

$$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2).$$

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$$(x + 12)(x - 2) = 0$$

Так как произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается нуль при $x = 2$, **а также при** $x = - 12$. **Это означает, что число** 2 **и** $- 12$ **являются корнями уравнения** $x^2 + 10x - 24 = 0$.

2. СПОСОБ: Метод выделения полного квадрата.

Решим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$. Выделим в левой части полный квадрат.

Для этого запишем выражение $x^2 + 6x$ в следующем виде:

$$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3.$$

полученном выражении первое слагаемое - квадрат числа х, а второе - удвоенное произведение х на 3. Поэтому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 9

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 9 = (x + 3)^2.$$

Преобразуем теперь левую часть уравнения

$$x^2 + 6x - 7 = 0,$$

прибавляя к ней и вычитая 9. Имеем:

$$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 9 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16.$$

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

$$(x + 3)^2 - 16 = 0, \quad (x + 3)^2 = 16.$$

Следовательно, $x + 3 = 4$, $x_1 = 1$, *или* $x + 3 = -4$, $x_2 = -7$.

3. СПОСОБ: *Решение квадратных уравнений по формуле.*

Умножим обе части уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$$

на 4a и преобразуем:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

$$((2ax)^2 + 2ax \cdot b + b^2) - b^2 + 4ac = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$2ax = -b \pm\sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

4. СПОСОБ: *Решение уравнений с использованием теоремы Виета.*

Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид

$$x^2 + px + q = 0. \qquad (1)$$

Если его корни x_1 , x_2 , то справедливы формулы :

$$x_1 x_2 = q,$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

По коэффициентам p и q можно предсказать знаки корней:

а) Если свободный член q приведенного уравнения (1) положителен ($q > 0$), то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и знаки зависят от второго коэффициента p. Если $p > 0$, то оба корня отрицательны, если $p < 0$, то оба корня положительны.

а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 2$ *и* $x_2 = 1$, *так как* $q = 2 > 0$ *и* $p = -3 < 0$;

$x^2 + 8x + 7 = 0$; $x_1 = -7$ *и* $x_2 = -1$, *так как* $q = 7 > 0$ *и* $p = 8 > 0$.

б) $x^2 + 4x - 5 = 0$; $x_1 = -5$ *и* $x_2 = 1$, *так как* $q = -5 < 0$ *и* $p = 4 > 0$;

$x^2 - 8x - 9 = 0$; $x_1 = 9$ *и* $x_2 = -1$, *так как* $q = -9 < 0$ *и* $p = -8 < 0$.

5. СПОСОБ: *Решение уравнений способом «переброски».*

Рассмотрим квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Умножая обе его части на а, получаем уравнение

$a^2x^2 + abx + ac = 0.$

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению

$y^2 + by + ac = 0$,

равносильному данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы обратной теореме Виета.

Окончательно получаем $x_1 = y_1/a$ и $x_1 = y_2/a$.

При этом способе коэффициент *а* умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют *способом «переброски»*. Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

- # Пример.

Решим уравнение $2x^2 - 11x + 15 = 0$**.**

Решение. **«Перебросим» коэффициент 2 к свободному члену, в результате получим уравнение**

$$y^2 - 11y + 30 = 0.$$

$$\begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = 6 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 5/2 \\ x_2 = 6/2 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 2{,}5 \\ x_2 = 3. \end{cases}$$

Ответ: 2,5; 3.

6. СПОСОБ: Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

А. Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, **где** $a \neq 0$.

1) Если, $a + b + c = 0$ ***(т.е. сумма коэффициентов равна нулю), то*** $x_1 = 1$,

$x_2 = c/a$.

Доказательство. **Разделим обе части уравнения на а ≠ 0, получим приведенное квадратное уравнение**

$$x^2 + b/a \cdot x + c/a = 0.$$

Согласно теореме Виета

$$x_1 + x_2 = - b/a,$$

$$x_1 x_2 = 1 \cdot c/a.$$

По условию $a – b + c = 0$, **откуда** $b = a + c$. **Таким образом,**

$$x_1 + x_2 = -(a + c)/a = -1 – c/a,$$

$$x_1 x_2 = - 1 \cdot (- c/a),$$

т.е. $x_1 = 1$ **и** $x_2 = c/a$, **что и требовалось доказать.**

Б. Если второй коэффициент **$b = 2k$** – четное число, то формулу корней

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ıожно записать в виде

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \qquad (2)$$

В. Приведенное уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

совпадает с уравнением общего вида, в котором $a = 1$, $b = p$ и $c = q$. Поэтому для приведенного квадратного уравнения формула корней

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{4a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \text{ или } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \qquad (3)$$

7. СПОСОБ: Графическое решение квадратного уравнения.

Если в уравнении

$$x^2 + px + q = 0$$

перенести второй и третий члены в правую часть, то получим

$$x^2 = -px - q.$$

Построим графики функций

$$y = x^2 \text{ и } y = -px - q.$$

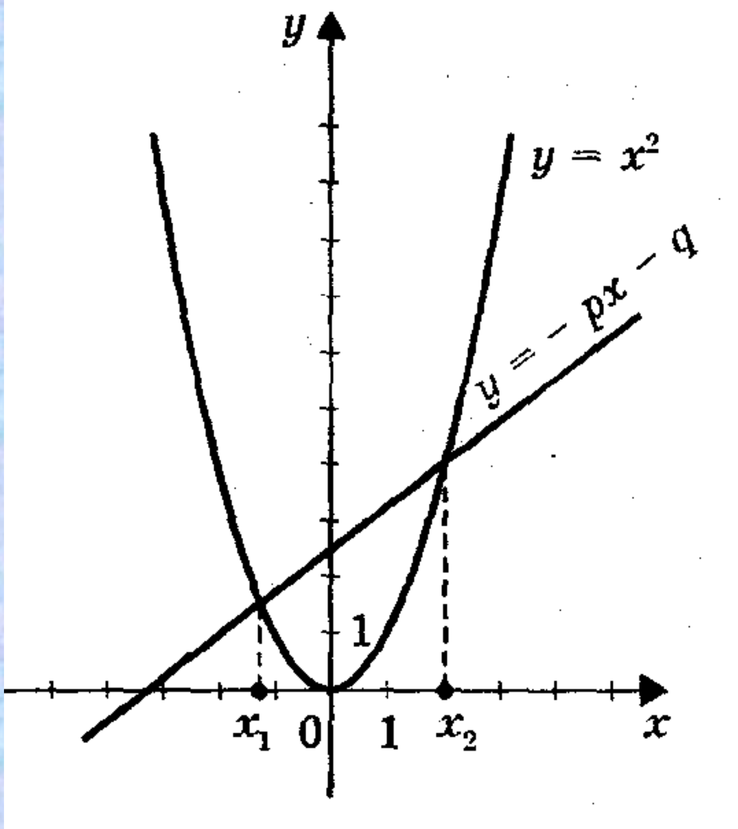


Рис. 1

• Пример

1) Решим графически уравнение

$x^2 - 3x - 4 = 0$ (рис. 2).

Решение. Запишем уравнение в виде

$x^2 = 3x + 4$.

Построим параболу $y = x^2$ и прямую

$У = 3x + 4$.

Прямую $y = 3x + 4$ можно построить по двум точкам

$M (0; 4)$ и $N (3; 13)$.

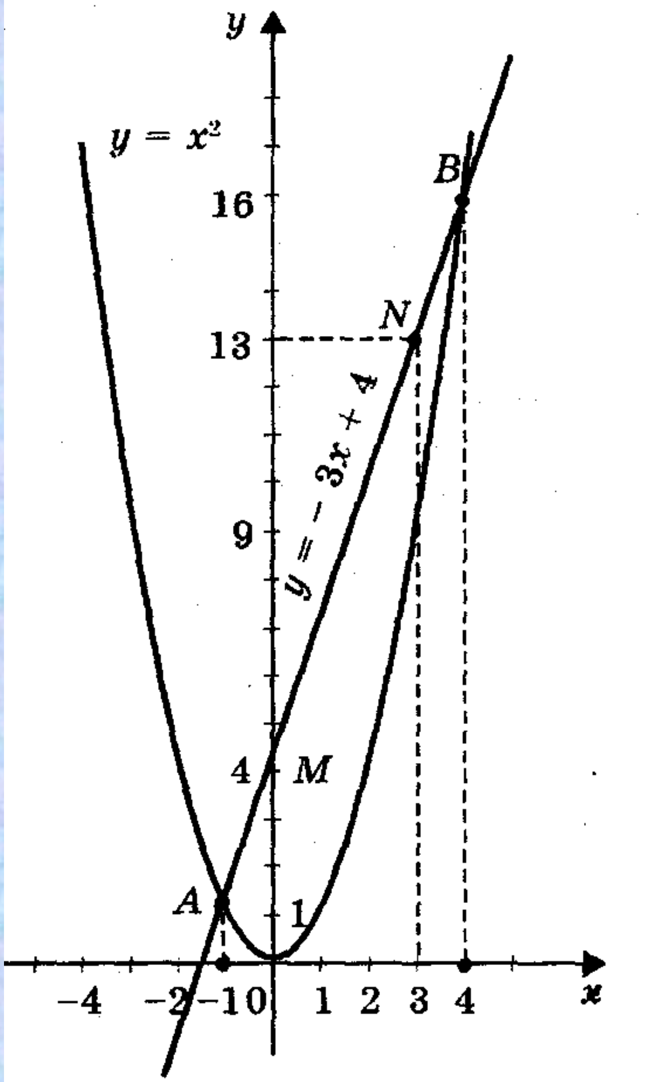


Рис. 2

***Ответ*: $x_1 = - 1$;**

$x_2 = 4$

8. СПОСОБ: Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.

Решим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с помощью циркуля и линейки (рис. 5).

Допустим, что искомая окружность пересекает ось

абсцисс в точках $B(x_1; 0)$ и $D(x_2; 0)$, где x_1 и x_2 - корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, и проходит через точки $A(0; 1)$ и $C(0; c/a)$ на оси ординат. Тогда по теореме о секущих имеем $OB \cdot OD = OA \cdot OC$, откуда $OC = OB \cdot OD / OA = x_1 x_2 / 1 = c/a$.

Центр окружности находится в точке пересечения перпендикуляров SF и SK, восстановленных в серединах хорд AC и BD,

$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a},$$

$$SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}.$$

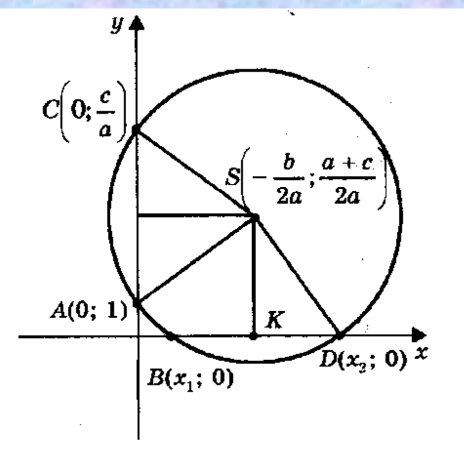


Рис. 5

Здесь могут быть случаи: 1) <u>Радиус окружности больше ординаты центра</u>

(AS > SK, или R > a + c/2a), окружность пересекает ось **Ox** в двух точках (6,а рис.) *B(x1; 0)* и *D(x2; 0)*, где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения *ax2 + bx + c = 0.*

2) <u>Радиус окружности равен ординате центра</u>

(AS = SB, или R = a + c/2a), окружность касается оси **Ox** (рис. 6,б) в точке *B(x1; 0)*, где x_1 - корень квадратного уравнения.

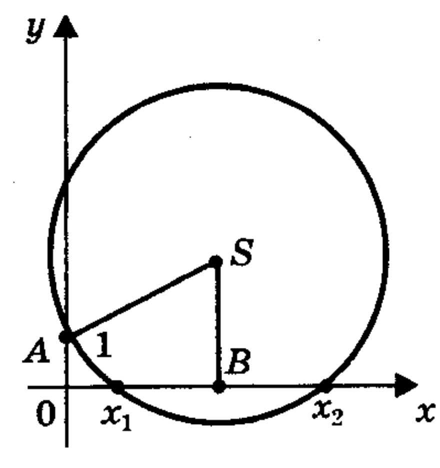
3) <u>Радиус окружности меньше ординаты центра</u>

окружность не имеет общих точек с осью абсцисс (рис.6,в), в этом случае уравнение не имеет решения.

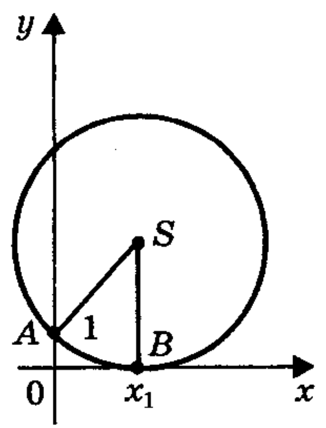
а) $AS > SB$, $R > \frac{a+c}{2a}$.
Два решения x_1 и x_2.

б) $AS = SB$, $R = \frac{a+c}{2a}$.
Одно решение x_1.

в) $AS < SB$, $R < \frac{a+c}{2a}$.
Нет решения.

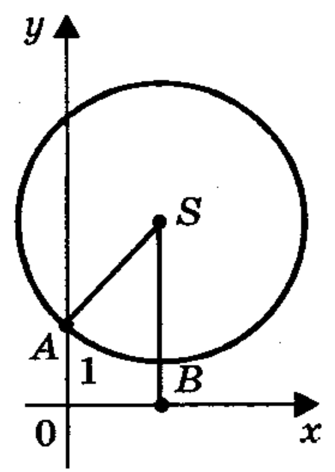


а)



б)

Рис. 6



в)

9. СПОСОБ: Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.

Это старый и забытый способ решения квадратных уравнений. Номограмма – графическое изображение математической зависимости.

Номограмма для решения уравнения $z^2 + pz + q = 0$.

Эта номограмма позволяет, не решая квадратного уравнения, по его коэффициентам определить корни уравнения.

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам (рис.11):

$$OB = \frac{a}{1+z},\ AB = \frac{-z^2}{1+z}.$$

Полагая $OC = p$, $ED = q$, $OE = a$ (все в см.), Из подобия треугольников CAH и CDF получим пропорцию

$$\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB},$$

откуда после подстановок и упрощений вытекает уравнение $z^2 + pz + q = 0$, причем буква z означает метку любой точки криволинейной шкалы.

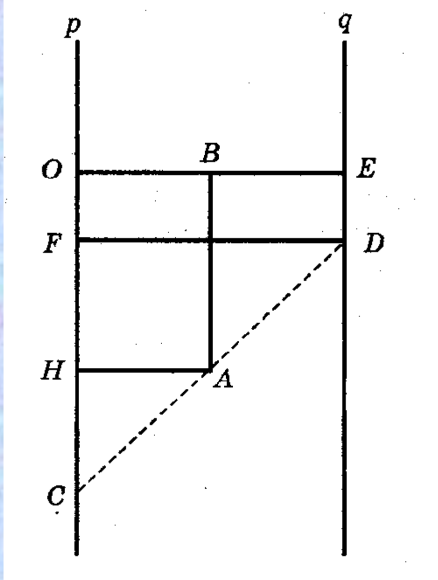


Рис. 11

- **Примеры.**

1) Для уравнения $z^2 - 9z + 8 = 0$ номограмма дает корни $z_1 = 8,0$ и $z_2 = 1,0$ (рис.12).

2) Решим с помощью номограммы уравнение

$2z^2 - 9z + 2 = 0.$

Разделим коэффициенты этого уравнения на 2,

получим уравнение

$z^2 - 4,5z + 1 = 0.$

Номограмма дает корни $z_1 = 4$ и $z_2 = 0,5$.

3) Для уравнения

$z^2 - 25z + 66 = 0$

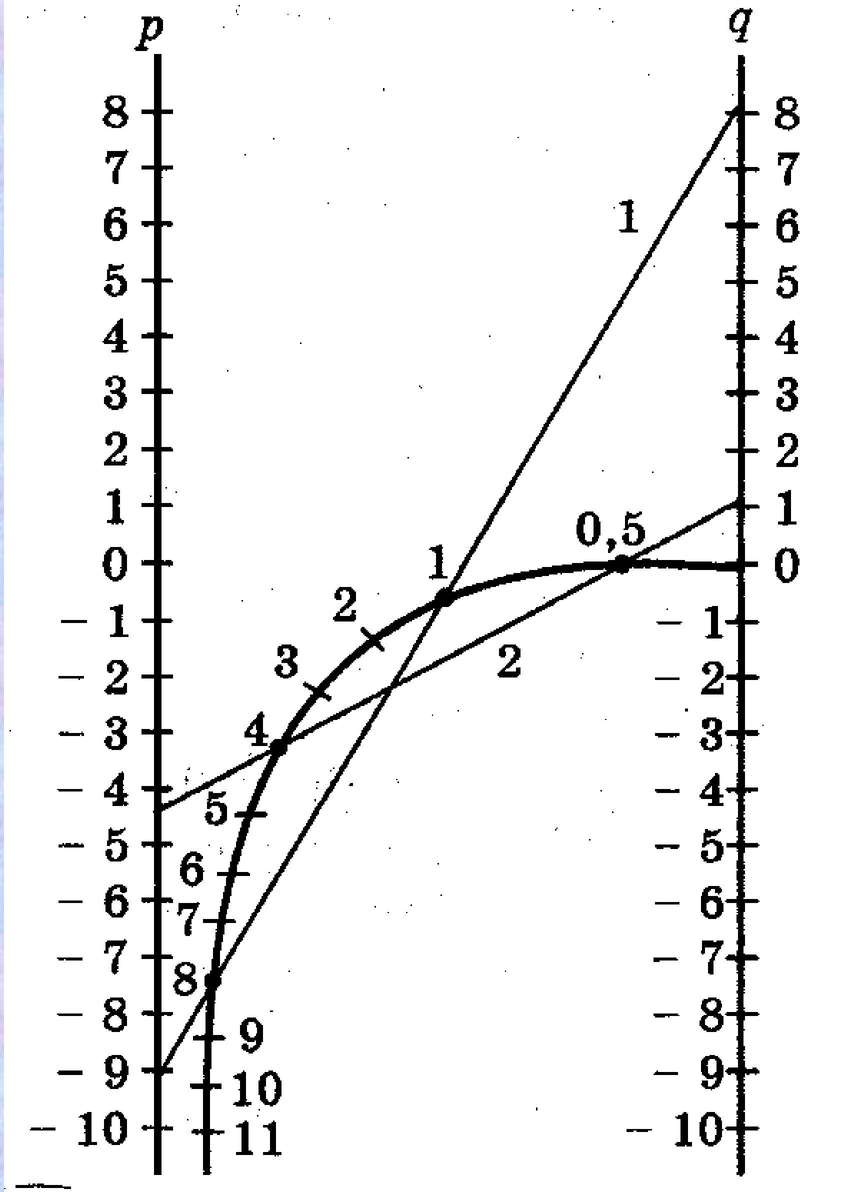
коэффициенты p и q выходят за пределы шкалы, выполним подстановку $z = 5t$,

получим уравнение

$t^2 - 5t + 2,64 = 0,$

которое решаем посредством номограммы и получим $t_1 = 0,6$ и $t_2 = 4,4$, откуда

$z_1 = 5t_1 = 3,0$ и $z_2 = 5t_2 = 22,0.$



10. СПОСОБ: Геометрический способ решения квадратных уравнений.

В древности, когда геометрия была более развита, чем алгебра, квадратные уравнения решали не алгебраически, а геометрически. Вот знаменитый пример из «Алгебры» ал - Хорезми.

Решим уравнение *$x^2 + 10x = 39$.*

В оригинале эта задача формулируется следующим образом : «Квадрат и десять корней равны 39» (рис.15).

Решение. Рассмотрим квадрат со стороной x, на его сторонах строятся прямоугольники так, что другая сторона каждого из них равна 2,5, следовательно, площадь каждого равна 2,5x. Полученную фигуру дополняют затем до нового квадрата ABCD, достраивая в углах четыре равных квадрата , сторона каждого их них 2,5, а площадь 6,25.

Площадь *S* квадрата *ABCD* можно представить как сумму площадей: первоначального квадрата *x^2*, четырех прямоугольников *($4 \cdot 2,5x = 10x$)* и четырех пристроенных квадратов *($6,25 \cdot 4 = 25$)*, т.е. *$S = x^2 + 10x + 25$.* Заменяя *$x^2 + 10x$* числом *39*, получим, что *$S = 39 + 25 = 64$*, откуда следует, что сторона квадрата *ABCD*, т.е. отрезок *AB = 8*. Для искомой стороны *x* первоначального квадрата получим

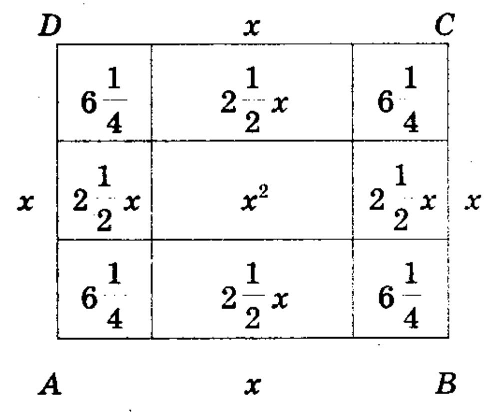


Рис. 15

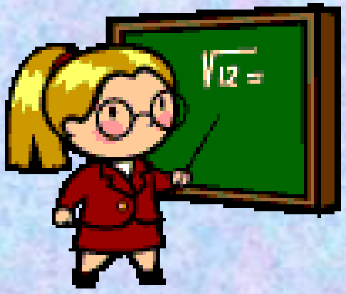
$$x = 8 - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3.$$

Заключение

Квадратные уравнения - это фундамент, на котором строится величественное здание алгебры. Квадратные уравнения находят широкое применение при решении тригонометрических, показательных, логарифмических, иррациональных и других уравнений и неравенств. Однако, значение квадратных уравнений заключается не только в изяществе и краткости решения задач. Не менее важно и то, что в результате применения квадратных уравнений при решении задач нередко обнаруживаются новые детали, удается сделать интересные обобщения и внести уточнения, которые подсказываются анализом полученных формул и соотношений.
Хочется отметить и то, что данная тема таит в себе много скрытого и неизвестного, что дает прекрасную возможность для дальнейшей работы над ней.

Подводя итоги, можно сделать вывод: квадратные уравнения играют огромную роль в развитии математики. Эти знания могут пригодиться нам на протяжении всей жизни.
Так как эти методы решения квадратных уравнений просты в применении, то они, безусловно, должны заинтересовать увлекающихся математикой учеников.

Применение.



Возможность применения полученных знаний: при решении предметных задач по математике и на уроках других предметов, в повседневной жизни.
Использование результатов исследования в виде презентаций учителями – предметниками, в качестве вспомогательного материала при проведении интегрированных уроков по различным учебным дисциплинам.
Использование материала во внеклассной работе по математике.

Литература:

1. *Алимов Ш.А.,* Алгебра 8 класс, Издательство просвещение,2009г.
2. *Брадис В.М.* Четырехзначные математические таблицы для средней школы.
Изд. 57-е. - М., Просвещение, 1990. С. 83.
3. *Кружепов А.К., Рубанов А.Т.* Задачник по алгебре и элементарным функциям. Учебное пособие для средних специальных учебных заведений. - М., высшая школа, 1969.
4. *Окунев А.К.* Квадратичные функции, уравнения и неравенства. Пособие для учителя. - М., Просвещение, 1972.
5. *Пресман А.А.* Решение квадратного уравнения с помощью циркуля и линейки. - М., Квант, № 4/72. С. 34.
6. *Соломник В.С., Милов П.И.* Сборник вопросов и задач по математике. Изд. - 4-е, дополн. - М., Высшая школа, 1973.
7. *Худобин А.И.* Сборник задач по алгебре и элементарным функциям. Пособие для учителя. Изд. 2-е. - М., Просвещение, 1970.
8.http// www.yandex.ru/